Serie Numeriche

Sia $\mathbf{a_n} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, si considerino le **somme parziali**

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

La somma della serie associata a $\mathbf{a_n}$ è il limite di $\mathbf{s_n}$

- La serie converge a $s \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

- La serie diverge a $\pm\infty$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$$

- La serie oscilla

$$\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$$

Il carattere di una serie non è influenzato da un numero finito di termini

Condizione necessaria per la convergenza

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Le uniche serie che **possono convergere** sono quelle il cui termine generale è infinitesimo.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge** nonostante si abbia $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **converge** $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$ **oscilla** nonostante si abbia $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 0$

Verificare se le seguenti serie possono convergere.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}} \cos n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log(1+n)}{n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin\frac{1}{n}\right)^n$

Serie notevoli

- Serie geometrica ($q \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \begin{cases} |q| < 1 & \textbf{converge a } 1/(1-q) \\ q \geq 1 & \textbf{diverge a } +\infty \\ q \leq -1 & \textbf{oscilla} \end{cases}$$

- Serie armonica generalizzata ($a \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \quad \begin{cases} a > 1 & \textbf{converge} \\ a \leq 1 & \textbf{diverge a } +\infty \end{cases}$$

- Serie armonica-logaritmica ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \log^b n} \quad \begin{cases} a > 1 \quad \forall b & \textbf{converge} \\ a < 1 \quad \forall b & \textbf{diverge a } +\infty \\ a = 1 \quad b > 1 & \textbf{converge} \\ a = 1 \quad b \leq 1 & \textbf{diverge a } +\infty \end{cases}$$

Serie a termini non negativi

Una serie a termini non negativi **converge oppure diverge positivamente** (non può oscillare).

$$a_n \geq 0 \qquad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \in [0, +\infty]$$

Criterio del Confronto

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n > n_0 \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Criterio del Confronto Asintotico

$$\begin{cases} a_n, b_n > 0 \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in (0, \infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \\ \textbf{hanno lo stesso carattere} \end{cases}$$

Serie a termini non negativi

Criterio del rapporto asintotico

Sia $a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty]$, allora:

- $l < 1$ $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **converge**
- $l > 1$ $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **diverge a** $+\infty$
- $l = 1$ $\quad$ **criterio inefficace**

Criterio della radice ennesima

Sia $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, sia $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty]$, allora:

- $l < 1$ $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **converge**
- $l > 1$ $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **diverge a** $+\infty$
- $l = 1$ $\quad$ **criterio inefficace**

Legame tra i due criteri Sia $a_n > 0 \quad \forall n > n_0 \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty] \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Esercizi-Serie a termini non negativi $a_n > 0$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} e^{-n}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} n^2}{n^2+1}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$ (Stirling $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{n}$)
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right)$
8. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - sin(n^5)}{\sqrt{n \log n} \log(n^n + n!)}$

Esercizi-Serie a termini non negativi $a_n > 0$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{2n}}$
10. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{|\log n|^6}$
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{\sqrt[3]{n^4+7}}$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$
13. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n+4^n}{\log n+5^n}$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n}+2n}$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Esercizi-Serie a termini non negativi $a_n > 0$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n^4 - \sqrt{n}}{\sqrt{n+\log n}\log(n!+n^n)}$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} \log \frac{n+3}{n^3+n^2+4}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \left[\frac{n}{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]^n$

22. Studiare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \leq 100 \\ \frac{1}{n^2} & n \geq 101 \end{cases}$$

Esercizi-Serie a termini non negativi $a_n > 0$

23. Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{e^{6n\alpha}}$$

24. Determinate: $\sup\{\alpha \geq 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{\alpha}{n}\right)^n < +\infty\}$

25. Determinate: $\inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2+\sin n}{n^\alpha \log n}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$

26. Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2} + \frac{1}{n^{\alpha+3} \log n}$$

27. Determinare per quali $b \in \mathbb{R}$ la serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh(bn)}{2^n}$$

Esercizi-Serie a termini non negativi $a_n > 0$

28. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che:
    - $a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
    - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **diverge**
    - $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ **converge**

    allora: **(a)** $0 \leq L < 1$, **(b)** $L > 1$, **(c)** $L = 1$
29. Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la serie converge:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha}}{n(n-1)}$$
30. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^{n}$$

Serie a termine di segno variabile

Convergenza assoluta

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \textbf{converge assolutamente} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \quad \textbf{converge}$$

Osservazione: Per testare la convergenza assoluta della serie $\sum |a_n|$ si possono usare tutti i criteri visti per le serie $\sum |a_n|$ è a termini non negativi.

Criterio della convergenza assoluta

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \textbf{converge assolutamente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \textbf{converge}$$

Osservazione: **Convergenza** $\not\Rightarrow$ **Convergenza assoluta**.
Se la serie $\sum a_n$ **converge** e $\sum |a_n|$ **non converge**, si dice che $\sum a_n$ **converge semplicemente**.

Serie a segno alterno

Sono serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ oppure $\sum_{n=0}^{\infty} \sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}]a_n$ o ancora $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi) a_n$ con $a_n \geq 0$.

Criterio di Leibniz

$$\begin{cases} a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \textbf{Converge}$$

Esercizi-Serie a termini di segno variabile

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)(-1)^n$
32. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+3^n)}$
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos n}{\sqrt[3]{n^7}}$
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin n}{n^{\frac{7}{3}}+\log n}$
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^3}$
36. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n+1)-\log n}{(\log n)^7}$
37. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{5^n (n!)^2}$
38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n^2-\log n}{n^6+10n^3\sin^2 n}}$
39. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

Esercizi-Serie a termini di segno variabile

40. Determinare gli $\alpha \geq 0$ per cui la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

41. Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n^\alpha}$$

42. Determinare gli $\alpha \geq 0$ per cui la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\log(n^{7\alpha} + 3) - \log n^{7\alpha}\right)$$

Serie Notevoli

Serie telescopiche

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n - b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Esercizi

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$
44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$
45. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n+1)\sin\frac{n\pi}{2} - n\cos\frac{n\pi}{2}}{n(n+1)}$
46. $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Serie Notevoli

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x \qquad \forall -1 \leq x \leq 1$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(x+1) \qquad -1 < x \leq 1$

Esercizi-Serie Notevoli

47. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{2n}$
48. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log^n 10}{n!}$
49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{2n}}{5n} \qquad |x| < 1$
50. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}$
51. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n-1)!}$
52. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ vale:
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = 1$$
53. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)^{2n+1}$$